

Вступительная работа по математике в 8 класс. 18 марта 2024 г.

1 вариант

Таблица ответов

| | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3 | 2 | -84 | 40 | -13 | 1024 | 35 | -1 | 4 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 750 | 9 | 211 | 3 | 135 | 6 | 18 | 642 | 2024 | 43 |

Задачи, оцениваемые в 1 балл

1. Решите уравнение $\frac{x+12}{9} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+1}{3}$.

Решение. $\frac{x+12}{9} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+1}{3}$; $2(x+12) - 3(x-1) = 6(x+1)$; $7x = 21$; $x = 3$.

Ответ: 3.

2. Вычислите $\frac{324^8}{2^{15} \cdot 9^{16}}$.

Решение. $\frac{324^8}{2^{15} \cdot 9^{16}} = \frac{(2^2 \cdot 3^4)^8}{2^{15} \cdot (3^2)^{16}} = \frac{2^{16} \cdot 3^{32}}{2^{15} \cdot 3^{32}} = 2$.

Ответ: 2.

3. Найдите значение выражения $(a+1)(a-1)(a^2+1) - (9+a^2)^2$ при $a = \frac{1}{3}$.

Решение.

$$(a+1)(a-1)(a^2+1) - (9+a^2)^2 = (a^2-1)(a^2+1) - (9+a^2)^2 = a^4 - 1 - 81 - 18a^2 - a^4 = -18a^2 - 82.$$

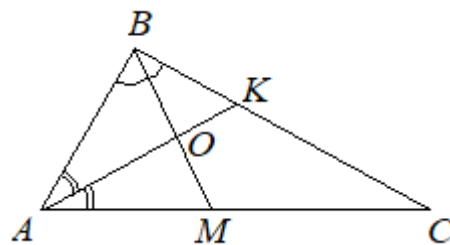
Значение полученного выражения при $a = \frac{1}{3}$ равно -84 .

Ответ: -84 .

4. В треугольнике ABC биссектрисы AK и BM пересекаются в точке O . Найдите угол C треугольника, если $\angle KOB = 70^\circ$.

Решение. По свойству внешнего угла треугольника $\angle BAO + \angle ABO = \angle KOB = 70^\circ$, тогда $\angle A + \angle B = 2 \cdot (\angle BAO + \angle ABO) = 140^\circ$, а $\angle C = 40^\circ$.

Ответ: 40 .



5. При каком значении k график функции $y = kx - 6$ проходит через точку $A(-2; 20)$?

Решение. Решая уравнение $20 = k \cdot (-2) - 6$, получаем, что $k = -13$.

Ответ: -13 .

6. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4?

Решение. На каждой из пяти позиций может оказаться одна из четырёх цифр. Значит, всего будет получено $4^5 = 1024$ различных чисел.

Ответ: 1024.

7. Сумма двух чисел равна 77. Найдите эти числа, если $\frac{2}{3}$ первого числа равны $\frac{4}{5}$ второго. В ответе укажите меньшее число.

Решение. Пусть первое число равно x , тогда второе число равно $(77 - x)$, следовательно, $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}(77 - x)$, откуда $x = 42$.

Ответ: 35.

8. Решите уравнение $\|x| + 5| = 6$. В ответе укажите произведение корней.

Решение. $\|x| + 5| = 6$; $|x| + 5 = 6$ или $|x| + 5 = -6$; $|x| + 5 = 6$; $|x| = 1$; $x = 1$ или $x = -1$.

Ответ: -1 .

9. Решите уравнение $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$. В ответе укажите больший корень.

Решение. $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$; $x^2(x - 4) - 9(x - 4) = 0$; $(x - 4)(x^2 - 9) = 0$; $(x - 4)(x - 3)(x + 3) = 0$; $x = 4$, или $x = 3$, или $x = -3$.

Ответ: 4.

10. В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, а внешний угол при вершине B равен 150° . Найдите AC , если $BC - AC = 10$.

Решение. В треугольнике ABC $\angle B = 30^\circ$, значит, $AC = \frac{1}{2}BC$ или $BC = 2AC$, следовательно, $2AC - AC = 10$, откуда $AC = 10$.

Ответ: 10.

Задачи, оцениваемые в 2 балла

11. В школе 40% учащихся имеют плохое зрение. 70% из них носят очки, остальные 30% пользуются контактными линзами. Общее число ребят в очках – 210. Сколько учащихся в школе?

Решение. Если ребят в очках 210, то учащихся с плохим зрением – $\frac{210 \cdot 100}{70} = 300$, следовательно, всего в школе $\frac{300 \cdot 100}{40} = 750$ учащихся.

Ответ: 750.

12. У Саши есть 4 карточки с цифрами 1, 2, 3 и 4. Он составляет из них разные числа. Сколько различных чисел, делящихся на 6, может составить Саша?

Решение. Так как число должно делиться на 6, то сумма цифр этого числа кратна 3, а его последняя цифра – чётна. Выберем всевозможные наборы карточек, сумма цифр которых делится на 3: $\{3\}$; $\{1, 2\}$; $\{2, 4\}$; $\{1, 2, 3\}$; $\{2, 3, 4\}$, из которых составим искомые числа: 12, 24, 42, 132, 312, 324, 234, 342, 432. Всего 9 чисел.

Ответ: 9.

13. Какова сумма цифр числа $10^{24} - 24$?

Решение. $10^{24} - 24 = \underbrace{100\dots00}_{24} - 24 = \underbrace{99\dots99}_{22}76$. Сумма цифр получившегося числа равна $22 \cdot 9 + 7 + 6 = 211$.

Ответ: 211.

14. Решите уравнение $x^2 - 6x + 9 + |x^2 - 9| = 0$.

Решение. $x^2 - 6x + 9 + |x^2 - 9| = 0$, $(x - 3)^2 + |x^2 - 9| = 0$, $\begin{cases} (x - 3)^2 = 0, \\ |x^2 - 9| = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 3, \\ \begin{cases} x = 3, \\ x = -3, \end{cases} \end{cases} \quad x = 3.$$

Ответ: 3.

15. Автомат делит чётное число пополам, а нечётное увеличивает на 5. Известно, что за три шага автомат получил из нечётного числа m число 35. Найдите m .

Решение. Решаем задачу «с конца»: на 3-м шаге автомат мог получить число 35 только из числа 70 (путём прибавления 5 число 35 получается из числа 30, а оно – чётное). На втором шаге автомат мог получить число 70 из чисел 140 или 65. Число 140 могло получиться из чисел 280 или 135, из которых нам подходит только второй вариант (число m – нечётное). Число 65 могло получиться только из числа 130, но оно – чётное.

Ответ: 135.

16. Сколько существует двузначных чисел, которые при перестановке цифр увеличиваются не менее, чем в 3 раза?

Решение. Пусть число $\overline{ab} = 10a + b$ удовлетворяет условию задачи, тогда $10b + a \geq 3(10a + b)$, откуда $b \geq \frac{29}{7}a$. Последнему неравенству удовлетворяют

пары цифр: (1; 5), (1; 6), (1; 7), (1; 8), (1; 9), (2; 9). Таким образом, искомым чисел 6: 15, 16, 17, 18, 19, 29.

Ответ: 6.

17. В классе 35 учеников. Известно, что ни у каких двух девочек количества друзей-мальчиков из этого класса не совпадают. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?

Решение. Наибольшее число девочек в классе будет в том случае, если одна из них вообще не дружит с мальчиками, вторая дружит с одним мальчиком, третья – с двумя мальчиками, и т.д. Тогда девочек в классе – 18, а мальчиков – 17.

Ответ: 18.

18. Четыре белки съели вместе 2024 ореха, каждая – не меньше 101. Первая белка съела больше всех, вторая и третья вместе съели 1281 орех. Сколько орехов съела первая белка?

Решение. Вторая и третья белки съели вместе 1281 орех, значит, вторая (по количеству съеденных орехов) белка съела не меньше 641 ореха (в противном случае эти две белки съели вместе не больше 1280 орехов). Это означает, что первая белка съела не менее 642 орехов. С другой стороны, все белки вместе съели не менее $642 + 1281 + 101 = 2024$ ореха. Таким образом, первая белка съела ровно 642 ореха.

Ответ: 642.

19. На какую наибольшую степень двойки делится число $12^{2024} - 2^{2024}$? В ответе укажите показатель этой степени.

Решение. $12^{2024} - 2^{2024} = 2^{2024} \cdot 6^{2024} - 2^{2024} = 2^{2024} \cdot (6^{2024} - 1)$. Число $(6^{2024} - 1)$ – нечётное, значит, данное число делится на 2^{2024} , но не делится на 2^{2025} .

Ответ: 2024.

20. На выставке авиамodelьного кружка были представлены 60 моделей истребителей и бомбардировщиков. Все модели были покрашены в зелёный или серебристый цвета. Количество моделей бомбардировщиков составляло 20% от количества моделей истребителей, а количество серебристых моделей – 25% от количества зелёных. Только 5 моделей бомбардировщиков были серебристого цвета. Сколько моделей истребителей были зелёного цвета?

Решение. Из 60 моделей было 10 моделей бомбардировщиков и 50 моделей истребителей, 12 – серебристого цвета и 48 – зелёного. Из 10 моделей бомбардировщиков 5 были серебристого цвета, значит, 5 были зелёного цвета. Из 48 моделей зелёного цвета 5 были бомбардировщиками, следовательно, 43 – модели истребителей.

Ответ: 43.

Вступительная работа по математике в 8 класс. 18 марта 2024 г.

2 вариант

Таблица ответов

| | | | | | | | | | |
|-----------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | $\frac{3}{4}$ | 99 | 60 | -2 | 625 | 40 | -1 | -6 | 2 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 625 | 8 | 1304 | -2 | 69 | 3 | 11 | 43 | 146 | 22 |

Задачи, оцениваемые в 1 балл

1. Решите уравнение $\frac{x+3}{12} - \frac{x-3}{4} = \frac{x+2}{6}$.

Ответ: 2.

2. Вычислите $\frac{3^{15} \cdot 4^{13}}{144^7}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

3. Найдите значение выражения $(3-b)(3+b)(9+b^2) + (4+b^2)^2$ при $b = \frac{1}{2}$.

Ответ: 99.

4. В треугольнике PQR биссектрисы PA и QB пересекаются в точке C . Найдите угол R треугольника, если $\angle PCB = 60^\circ$.

Ответ: 60.

5. При каком значении k график функции $y = kx - 4$ проходит через точку $B(14; -32)$?

Ответ: -2.

6. Сколько различных четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры могут повторяться)?

Ответ: 625.

7. Разность двух чисел равна 12. Найдите эти числа, если $\frac{2}{5}$ первого числа равны $\frac{4}{7}$ второго. В ответе укажите большее число.

Ответ: 40.

8. Решите уравнение $||x| + 7| = 8$. В ответе укажите произведение корней.

Ответ: -1.

9. Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 36x - 72 = 0$. В ответе укажите меньший корень.

Ответ: -6 .

10. В треугольнике PQR $\angle R = 90^\circ$, а внешний угол при вершине Q равен 150° . Найдите PR , если $PQ + PR = 6$.

Ответ: 2 .

Задачи, оцениваемые в 2 балла

11. В школе 80% учащихся занимаются спортом. 60% из них увлекаются игровыми видами спорта, остальные 40% – лёгкой атлетикой. Общее число легкоатлетов – 200. Сколько учащихся в школе?

Ответ: 625.

12. У Юли есть 4 карточки с цифрами 4, 5, 6 и 7. Она составляет из них разные числа. Сколько различных чисел, делящихся на 6, может составить Юля?

Ответ: 8.

13. Какова сумма цифр числа $10^{146} - 146$?

Ответ: 1304.

14. Решите уравнение $x^2 + 4x + 4 + |x^2 + 2x| = 0$.

Ответ: -2 .

15. Паша делит чётное число пополам, а нечётное увеличивает на 7. За три шага Паша из нечётного числа n получил число 19. Найдите n .

Ответ: 69.

16. Сколько существует двузначных чисел, которые при перестановке цифр увеличиваются не менее, чем в 4 раза?

Ответ: 3.

17. В секции фигурного катания занимаются 21 человек. Известно, что ни у каких двух мальчиков количества друзей-девочек из этой секции не совпадают. Какое наибольшее количество мальчиков может быть в этой секции?

Ответ: 11.

18. Четыре мальчика коллекционируют модели автомобилей. Всего у них 146 моделей, у каждого не менее 20. У первого моделей больше всех, второй и третий вместе имеют 83 модели. Сколько моделей у первого?

Ответ: 43.

19. На какую наибольшую степень двойки делится число $12^{146} + 2^{146}$? В ответе укажите показатель этой степени.

Ответ: 146.

20. В июне прошлого года количество солнечных дней в Перми составляло 25% от количества пасмурных, а количество тёплых дней – 20% от количества прохладных. Только 3 дня в июне были тёплыми и солнечными. Сколько дней были пасмурными и прохладными?

Ответ: 22.